Université 8 Mai 1945 - Guelma

Faculté de Mathématique, de l'Informatique et des sciences de la Matière

Année universitaire 2022/2023

Département de Mathématiques

1ère Année Master EDP et A.Numérique

PV DE NOTE

Matière: Introduction aux EDP.

N°	Matrcicule	Nom	Prénoms	C.C	Exam	Consult.	Signature	Ratt
01	19/3604166 4	AOUISSI	SIFEDDINE	09,00	04,00			
02	19/3603461 3	BACIL	MAYSSA	09,25	06,75			
03	15/3604990 8	BOUGATEF	AHLEM					
04	12/6010501	BOULFOUL	Khelil					
05	16/3604630 2	BOUNEFLA	LINA					
06	18/3604351 7	CHEDDADI	SAMIHA	09,75	05,75			
07	16/3604730 0	DEBABGHA	Abdetouab					
08	17/3604384 9	DJEDAIDIA	HALIMA	09,00	05,00			
09	17/3604338 7	FASSI	NARIMANE					
10	19/3603579 9	GHELLAB	AMIRA	12,50	08,50			
11	19/3603378 7	LAFIFI	MANAR	14,00	10,75			
12	19/3603595 1	LARIBI	NADA	13,50	17.50			
13	19/3603657 3	LELLOUCHE	SAMAH	11,75	07,50			
14	19/3603356 8	MENAI	CHAYMA	11.00	10,00			
15	15/3605421 9	OULED-DIAF	RANIA					
16	19/3604054 1	TALBI	AYA	12,00	08,00			

Nom,prénom et signature chargé TD

Nom,prénom et signature chargé de Cours

Mlle Assoui Fatima

تطبيقي Master 1 EDP S1

Ex1 : ① Equation des ondes :

ⓐ $\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx} + h(x,t) \\ U(x,0) = f(x), \quad U_t(x,0) = g(x). \end{cases}$

la solution de d'Alembert est donnée par :

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y,s).dy.ds.$$

2pts

ⓑ la résolution du Problème suivant :

$\begin{cases} U_{tt} = 4\,U_{xx} + t\sin x. \\ U(x,0) = ch\,x, \quad U_t(x,0) = sh(x) \end{cases}$

$c=2, \quad h(x,t) = t\sin x, \quad f(x) = ch(x), \quad g(x) = sh(x).$

$U(x,t) = I_1 + I_2 + I_3.$ $\qquad I_1 = \frac{1}{2}\left[ch(x+2t) + ch(x-2t)\right].$

$$I_2 = \frac{1}{4}\int_{x-ct}^{x+ct} sh(y)\,dy = \frac{1}{4}\left[ch(y)\right]_{x-ct}^{x+ct} = \frac{1}{4}\left[ch(x+2t) - ch(x-2t)\right].$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\left[\int_0^t \int_{x-2t+2s}^{x+2t-2s} s.\sin y\,dy\,ds\right] = \frac{1}{4}\int_0^t s\left[-\cos y\right]_{x-2t+2s}^{x+2t-2s} ds.$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \left(-s\cos(x+2t-2s) + s\cos(x-2t+2s)\right) ds$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^t -s\cos(x+2t-2s)\,ds + \int_0^t s\cos(x-2t+2s)\,ds\right.$$

4pts

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{s}{2}\sin(x+2t-2s)\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(x+2t-2s)\,ds\right.$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\frac{s}{2}\sin(x-2t+2s)\Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t \sin(x-2t+2s)\,ds\right.$$

$$= \frac{t}{8}\sin x + \frac{1}{8}\int_0^t \sin(x+2t-2s)\,ds$$

$$+ \frac{t}{8}\sin x - \frac{1}{8}\int_0^t \sin(x-2t+2s)\,ds$$

donc :

$$\boxed{U(x,y) = \frac{3}{4}ch(x+2t) + \frac{1}{4}ch(x-2t) + \frac{t}{4}\sin x + \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{16}\left(\cos(x+2t) + \cos(x-2t)\right)}$$

Ex2 : ⓐ Equation de la Chaleur :

$$\begin{cases} U_t = c^2 U_{xx} + f(x,t) \\ U(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$

la solution est :

$$U(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2 t}} d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi,\tau)}{2c\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2(t-\tau)}} d\xi \,.\, d\tau$$

2pts

La solution du Problème suivant :

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + e^{-t}\cos x, \\ U(x,0) = \phi(x) = \cos x. \end{cases} \qquad f(x,t) = e^{-t}\cos x. \quad c = 1.$$

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\xi) \cdot e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}} d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \cdot \cos\xi\, e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} d\xi \,.\, d\tau$$

$U(x,t) = I_1 + I_2$. (page 86)

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$$

soit : $\beta = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\alpha = x - \xi \Rightarrow \xi = x - \alpha$ et $d\xi = -d\alpha$.

I_1 devient :

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x-\alpha)\, e^{-\beta^2\alpha^2} d\alpha$$

$$I_1 = \frac{\cos x}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha\, e^{-\beta^2\alpha^2} d\alpha + \frac{\sin x}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha \cdot e^{-\beta^2\alpha^2} d\alpha.$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\pi t}} \cdot I(\beta) + \frac{\sin x}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \cancel{J(\beta)}$$

$= 0$ car la fonction est impaire.

$I(\beta) = 2\sqrt{\pi t} \cdot e^{-t}$. (exercice de TD).

$$I_1 = \frac{\cos x}{2\sqrt{\pi t}} 2\sqrt{\pi t} \cdot e^{-t} = e^{-t}\cos x.$$

$$I_2 = \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\tau}\cos\xi}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} d\xi \right] d\tau$$

$$I_2 = \int_0^t F(x,\tau)\, d\tau$$

dans la fonction $F(x,\tau)$ on pose :

$\alpha = x - \xi$, $\xi = x - \alpha$, $d\xi = -d\alpha$.

$\beta = \frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}$, $e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} = e^{-\beta^2\alpha^2}$.

$$F(x,\tau) = \frac{e^{-\tau}}{2\sqrt{(t-\tau)\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x-\alpha)\, e^{-\beta^2\alpha^2} d\alpha.$$

avec la même manière :

$$F(x,\tau) = \frac{e^{-\tau}\cos x}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} I(\beta) + \frac{e^{-t}\sin x}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} J(\beta)$$

les même calcule

$$F(x,\tau) = e^{-\tau}\cos x.$$

$$I_2 = \int_0^t e^{-\tau}\cos x\, d\tau = \cos x \int_0^t e^{-\tau} d\tau =$$

$$I_2 = t e^{-t}\cos x$$

$$U(x,t) = I_1 + I_2 = e^{-t}\cos x + t e^{-t}\cos x$$

$$U(x,t) = (1+t)e^{-t}\cos x.$$

4pts

(Voir bien le polycopie p87)

$\bullet$ Si $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$ → comme $\mu \neq 0$

$X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$

$X'(x) = -\mu A\sin(\mu x) + \mu B\cos(\mu x)$

$X'(0) = \mu B = 0 \Rightarrow B = 0.$

$X(x) = A\cos(\mu x)$

$X'(x) = -\mu A \sin(\mu x)$

$X'(\pi) = 0 = -\mu A \sin(\mu \pi)$

et il faut que $A \neq 0$ pour ne pas avoir une solution trivial une autre fois

$\mu\pi = n\pi \Longrightarrow \boxed{\mu = n}$

$X_n(x) = A_n \cos nx$

Cherchons $Y(y)$? $\quad Y'' - \lambda Y = 0.$

$\lambda = 0 \Rightarrow Y'' = 0 \Rightarrow Y(y) = A'_0 y + B'_0.$

$\lambda > 0. \quad \lambda = n^2. \qquad Y_n(y) = A'_n e^{ny} + B'_n e^{-ny}.$

Solution générale de l'EDP : d'après le Théorie de la superposition :

$$U(x,y) = X_0(x).Y_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x).Y_n(y).$$

$$(X_0(x) = B_0 \;;\; Y_0(y) = A_0 y + B_0) \quad X_0.Y_0 = A'_0 y + B'_0$$

$$U(x,y) = A'_0 y + B'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A''_n e^{ny} + B''_n e^{-ny}) \cos(nx)$$

$$A''_n = A'_n . A_n \quad , \quad B''_n = B'_n . A_n.$$

d'après : les solutions particulière : $y = 0$, $y = \pi$.

$\bullet$ $U(x,0) = 0 = B'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A''_n + B''_n)\cos nx = 0$ donc

$$B'_0 = 0, \quad A''_n = -B''_n.$$

$$U(x,y) = A'_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} 2A''_n \,\mathrm{sh}(ny) \cos nx.$$

$\bullet$ $U(x,\pi) = 2x + \pi = \underbrace{A'_0 . \pi} + \sum \underbrace{2A_n \,\mathrm{sh}(n\pi)}_{A_n} \cos(nx).$

$$2x + \pi = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx).$$

Il reste à calculer les coefficients de Fourier : A_0 et A_n

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (2x+\pi)\,dx \quad , \quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (2x+\pi)\cos(nx)\,dx.$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\left[x^2 + \pi x\right]_0^{\pi} = 2\pi. \quad A_n = \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\left[\frac{1}{n}(2x+\pi)\sin nx\right]_0^{\pi}} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^2}((-1)^n - 1).$$

Ex02 : Soit l'EDP: $-4x^2 U_{yy} + U_{xx} - \frac{1}{x} U_x + y U_y = 0 \ldots$ (E)

$a = 1$, $b = 0$, $c = -4x^2$. $b^2 - 4ac = 16x^2$, donc l'équation est hyperbolique.

l'équation caractéristique : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x^2 = 0$, nous donne les deux courbes caractéristiques réelles : $x^2 - y = c_1$, $x^2 + y = c_2$

Soit : $\begin{cases} \xi = x^2 - y \\ \eta = x^2 + y \end{cases}$ alors:

ξ	ξ_x	ξ_y	ξ_{xy}	ξ_{xx}	ξ_{yy}
x^2+y	$2x$	1	0	2	0
η	η_x	η_y	η_{xy}	η_{xx}	η_{yy}
x^2-y	$2x$	-1	0	2	0

$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x$

$U_x = 2x U_\xi + 2x U_\eta$.

$U_y = U_\xi \eta_y + U_\eta \cdot \eta_y$

$U_y = U_\xi - U_\eta$.

$U_{xx} = 4x^2 U_{\eta\eta} + 8x^2 U_{\xi\eta} + 4x^2 U_{\xi\xi} + 2U_\xi + 2U_\eta$.

$U_{yy} = U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$.

3 pts.

L'équation (E) devient : $16x^2 U_{\xi\eta} + y U_\xi - y U_\eta = 0$.

Ex03 : $\begin{cases} U_{xx} + U_{yy} = 0 \\ U_x(0,y) = U_x(\pi, y) = 0 \\ U(x,0) = 0, \quad U(x,\pi) = 2x + \pi . \end{cases}$

5 pts.

$U(x,y) = X(x) . Y(y)$.

$U_{xx} + U_{yy} = Y . X'' + X . Y'' = 0$.

$\frac{Y . X''}{Y . X} = - \frac{X . Y''}{X . Y} = -\lambda . \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \ldots (1) \\ Y'' - \lambda Y = 0 \ldots (2) \end{cases}$

$U_x(0,y) = U_x(\pi, y) = 0 \Rightarrow X'(0) = X'(\pi) = 0$.

(1) $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$

si $\lambda = 0 \Rightarrow X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$

$\left.\begin{aligned} X'(0) = 0 \Rightarrow \\ X'(\pi) = 0 \Rightarrow \end{aligned}\right\}$ $A = 0$. donc $X_0(x) = B_0$ Constante Arbitraire

(2) Si $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -\mu^2$,

$X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$

$\rightarrow X'(x) = A\mu e^{\mu x} - B\mu e^{-\mu x}$.

$X'(0) = X'(\pi) = 0$.

$X'(0) = A\mu - B\mu = 0$.

$\mu.(A - B) = 0$, $\mu \neq 0$.

$A = B$.

$X'(x) = A\mu e^{\mu x} - A\mu e^{-\mu x}$

$X'(\pi) = A\mu \, 2 \operatorname{sh}(\mu\pi) = 0$

$\Rightarrow A = 0$, comme $\operatorname{sh}(\mu\pi) \neq$

$\Rightarrow X(x) = 0$. S.T.