Université 8 Mai 1945 - Guelma

Faculté de Mathématique, de l'Informatique et des sciences de la Matière

Année universitaire 2022/2023

Département de Mathématiques

1ère Année Master EDP et A.Numérique

PV DE NOTE

Matière: Analyse approfondie.

N°	Matrcicule	Nom	Prénoms	C.C	Exam	Consult.	Signature	Ratt
01	19/36041664	AOUISSI	SIFEDDINE	11	10			
02	19/36034613	BACIL	MAYSSA	11	10			
03	15/36049908	BOUGATEF	AHLEM					
04	12/6010501	BOULFOUL	Khelil					
05	16/36046302	BOUNEFLA	LINA					
06	18/36043517	CHEDDADI	SAMIHA	11	10	11		
07	16/36047300	DEBABGHA	Abdetouab					
08	17/36043849	DJEDAIDIA	HALIMA	11	10			
09	17/36043387	FASSI	NARIMANE					
10	19/36035799	GHELLAB	AMIRA	12	11			
11	19/36033787	LAFIFI	MANAR	12	11			
12	19/36035951	LARIBI	NADA	14	13			
13	19/36036573	LELLOUCHE	SAMAH	11	10	11		
14	19/36033568	MENAI	CHAYMA	15	14			
15	15/36054219	OULED-DIAF	RANIA					
16	19/36040541	TALBI	AYA	14	13	14		

Nom,prénom et signature chargé TD

Nom,prénom et signature chargé de Cours

Badreddine Meftah

Master 1

Meftah

S 1

Master 1 Mathématiques

Examen d'analyse approfondie Durée 1h30mn

Exo 1.

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$.

1/ Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $y' + 2axy = 0$.

2/ En appliquant la transformation de Fourier à cette équation differentielle, en déduire une équation différentielle vérifiée par $\widehat{f}$.

3/ Sachant que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, calculer $\widehat{f}(0)$.

On considère l'équation de la chaleur en une dimension pour une fonction $u(x,t)$ où $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Cette équation modélise l'évolution de la chaleur sur un fil de longueur infinie. La quantité $u(x,t)$ représente la température du fil à l'abscisse x et au temps t.

4/ On considère que pour tout temps t, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est intégrable. On pose $\widehat{u}(\omega,t)$ sa transformée de Fourier. Montrer que $\widehat{u}$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega,t) + \omega^2 \widehat{u}(\omega,t) = 0.$$

5/ En déduire que $\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{u_0}(\omega) e^{-\omega^2 t}$.

6/ On pose $g(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}$, montrer que : $u(x,t) = \frac{1}{2\pi} u_0(x) * \mathcal{F}^{-1}(g(\omega,t))(x)$.

7/ Montrer que $\mathcal{F}^{-1}(g(\omega,t))(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. En déduire que :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} u_0(x-y)\, dy.$$

Exo 2.

Pour $t \geq 0$, résoudre les équations différentielles suivantes en appliquant la transformée de Laplace.

1/ $2y' + y = 1$ avec $y(0) = 1$ et $t \geq 0$.

2/ $y'' + 3y' - 4y = e^{-t}$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution de l'Exo 1

1/ Comme $f(x) = e^{-ax^2} \Rightarrow f'(x) = -2axe^{-ax^2}$ donc $f'(x) + 2axf(x) = 0$. Ainsi f vérifie l'EDO $y' + 2axy = 0$.

2/ $f' + 2axf = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(f' + 2axf) = \mathcal{F}(0) = 0$, En utilisant les propriétés de $\mathcal{F}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f' + 2axf) &= \mathcal{F}(f') + 2a\mathcal{F}(xf) \\ &= \widehat{f'} + 2ai\left(\widehat{f}\right)' \\ &= i\omega\widehat{f}(\omega) + 2ai\left(\widehat{f}\right)'(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\widehat{f}(\omega)$ satisfait l'l'EDO $2ai\left(\widehat{f}\right)'(\omega) + i\omega\widehat{f}(\omega) = 0 \Rightarrow 2a\left(\widehat{f}\right)'(\omega) + \omega\widehat{f} = 0$.

3/ $\widehat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx \Rightarrow \widehat{f}(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega 0} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

4/ Dans les EDP on applique la transformée de Fourier à la variable dont le degré de dérivation est le plus grand ici c'est par rapport à x, non pas t. On a $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right) = \mathcal{F}(0) = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right)(\omega) &= \mathcal{F}.\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)(\omega) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right)(\omega) \\ &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega,t) - (i\omega)^2\,\widehat{u}(\omega,t) \\ &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega,t) + \omega^2\widehat{u}(\omega,t) = 0, \end{aligned}$$

qui représente une EDO du premier ordre.

5/ $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega,t) + \omega^2\widehat{u}(\omega,t) = 0$. En intégrant cette dernière par rapport à t on obtient

$\frac{\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega,t)}{\widehat{u}(\omega,t)} = -\omega^2 \Rightarrow \ln\widehat{u}(\omega,t) - \ln\widehat{u}(\omega,0) = -\omega^2\int dt = -\omega^2 t$

$\Rightarrow \ln\frac{\widehat{u}(\omega,t)}{\widehat{u}(\omega,0)} = -\omega^2 t \Rightarrow \frac{\widehat{u}(\omega,t)}{\widehat{u}(\omega,0)} = e^{-\omega^2 t}$

$\Rightarrow \widehat{u}(\omega,t) = \widehat{u}(\omega,0)\, e^{-\omega^2 t} = \widehat{u_0}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$.

6/ Montrons $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}u_0(x) * \mathcal{F}^{-1}(g(\omega,t))(x)$ où $g(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}$, pour cela calculons $\mathcal{F}\left(u_0(x) * \mathcal{F}^{-1}(g(\omega,t))(x)\right)$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(u_0(x) * \mathcal{F}^{-1}(g(\omega,t))(x)\right) &= \mathcal{F}(u_0(x))\,.\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(g(\omega,t))(x)\right) \\ &= 2\pi\widehat{u}_0(\omega)\,.g(\omega,t) \\ &= 2\pi\widehat{u}_0(\omega)\,.e^{-\omega^2 t} \\ &= 2\pi\widehat{u}(\omega,t) \\ &= 2\pi\mathcal{F}(u(x,t)) \\ &= \mathcal{F}(2\pi u(x,t)). \end{aligned}$$

1

1

1

1

2

D'où $u_0(x) * \mathcal{F}^{-1}(g(\omega,t))(x) = 2\pi u(\omega,t)$. Ainsi on obtient $u(\omega,t) = \frac{1}{2\pi} u_0(x) * \mathcal{F}^{-1}(g(\omega,t))(x)$.

7/ D'après la troisième question (3/) on a la transformée de $f(x) = e^{-ax^2}$ est $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ on remarque d'après l'écriture de g : $g(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}$ qui peut-être identifier à f on posons $\omega = x$ et $t = a$. D'où $\widehat{g}(\omega,t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{\omega^2}{4t}}$. 1

Ainsi $u(x,t) = \frac{1}{2\pi} u_0(x) * \mathcal{F}^{-1}(g(\omega,t))(x) = \frac{1}{2\pi} u_0(x) * \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} u_0(x-y) \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x-y) e^{-\frac{x^2}{4t}} dx.$

Solution de l'Exo 2

1/ $2y' - y = 1 = H(t) \Rightarrow L(2y' + y) = L(H(t)) \Rightarrow 2L(y') + L(y) = L(H(t)) \Rightarrow 2(pF(p) - 1) - F(p) = \frac{1}{p}$ 1

$\Rightarrow (2p-1)F(p) = 2 + \frac{1}{p} = \frac{2p+1}{p} \Rightarrow F(p) = \frac{2p+1}{p(2p-1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{2p-1} = \frac{4}{2p-1} - \frac{1}{p}$ 2

$\Rightarrow L^{-1}(F(p)) = L^{-1}\left(\frac{4}{2p-1} - \frac{1}{p}\right) \Rightarrow y(t) = L^{-1}\left(\frac{2}{p-\frac{1}{2}}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 2e^{\frac{1}{2}t} + H(t)$.

2/ $y'' + 3y' - 4y = e^{-t} \Rightarrow L(y'' + 3y' - 4y) = L(e^{-t}) \Rightarrow L(y'') + 3L(y') - 4L(y) = L(e^{-t})$. 1

Pour $L(y(t)) = F(p)$ on a : $L(y'(t)) = pF(p) - 1$ et $L(y''(t)) = p^2F(p) - p$.

Ainsi on obtient : $p^2F(p) - p + 3(pF(p) - 1) - 4F(p) = \frac{1}{p+1} \Rightarrow (p^2 + 3p - 4)F(p) = p + 3 + \frac{1}{p+1}$

$\Rightarrow F(p) = \frac{p+3}{p^2+3p-4} + \frac{1}{(p+1)(p^2+3p-4)} = \frac{p+3}{(p-1)(p+4)} + \frac{1}{(p+1)(p-1)(p+4)} = \frac{\frac{4}{5}}{p-1} + \frac{\frac{1}{5}}{p+4} - \frac{\frac{1}{6}}{p+1} + \frac{\frac{1}{10}}{p-1} + \frac{\frac{1}{15}}{p+4}$. 2

$L^{-1}(F(p)) = L^{-1}\left(\frac{\frac{4}{5}}{p-1} + \frac{\frac{1}{5}}{p+4} - \frac{\frac{1}{6}}{p+1} + \frac{\frac{1}{10}}{p-1} + \frac{\frac{1}{15}}{p+4}\right)$

$= \frac{4}{5}L^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) + \frac{1}{5}L^{-1}\left(\frac{1}{p+4}\right) - \frac{1}{6}L^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) + \frac{1}{10}L^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) + \frac{1}{15}L^{-1}\left(\frac{1}{p+4}\right)$ 2

$= \frac{4}{5}e^{t} + \frac{1}{5}e^{-4t} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{10}e^{t} + \frac{1}{15}e^{-4t} = \frac{9}{10}e^{t} + \frac{4}{15}e^{-4t} - \frac{1}{6}e^{-t}$.