Examen final : Algèbre 1 / 2023 / Corrigé

EX01 [7 pts]

(A)
1. $f(A) = \{y = f(x), x \in A\} \subset F$ 0,75
2. $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\} \subset F$ 0,75

(B) $(P) : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ (F) 0,5 + 0,5

$(\overline{P}) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

$(Q) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ (V) 0,5 + 0,5

$(\overline{Q}) : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

$(\overline{Q}) : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ (F) 0,5 + 0,5

$(R) : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

$(\overline{R}) : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},$

(C) $E = \{0\}, F = \{1\}$

$P(E) = \{\emptyset, E\}, P(F) = \{\emptyset, F\}$ 0,5 , 0,5

$P(E) \cup P(F) = \{\emptyset, E, F\}$ 0,5

$P(E \cup F) = \{\emptyset, E, F, \{0,1\}\}$ 0,5

On remarque que $P(E) \cup P(F) \subset P(E \cup F)$. 0,5

EX02 [7 pts] $f(x) = x^2$, $A = [-2, 1]$, $B = [-1, 4]$

1. $f(A) = [0,4]$, $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$ 0,5

$f^{-1}(A) = [-1,1]$, $f(f^{-1}(A)) = f([-1,1]) = [0,1]$ 0,5

On a donc obtenu dans ce cas précis les relations :

$f(f^{-1}(A)) \subset A$ et $A \subset f^{-1}(f(A))$ 0,5 + 0,5

2. On a : $A \cap B = [-1,1]$, $f(A \cap B) = [0,1]$ 0,5

$f(A) = [0,4]$, $f(B) = [0,16]$, $f(A) \cap f(B) = [0,4]$ 0,5

On a donc montré dans ce cas particulier que :

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ 0,5

3. $f(A \cup B) = f([-2,4]) = [0,16]$ 0,5

$f(A) \cup f(B) = [0,4] \cup [0,16] = [0,16]$ 0,5

donc $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 0,5

B) 1. f injective, g injective $\Rightarrow g\circ f$ injective.

Soient $x_1, x_2 \in E$ tq $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$.

$(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow$

$f(x_1) = f(x_2)$ car g est injective

$\Rightarrow x_1 = x_2$ car f est injective 0,5

donc $g\circ f$ est injective.

2. Soient $x_1, x_2 \in E$ tq $f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow (g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

car $(g\circ f)$ est injective.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ est injective. 0,5

$g\circ f : E = \{0,1\} \longrightarrow G = \{0,1,3\}$

$\left.\begin{array}{l}(g\circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0 \\ (g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f$ est injective

$g : F = \{0,1,2\} \longrightarrow G = \{0,1,3\}$ 1

$g(0) = 1, \; g(1) = 0, \; g(2) = 0$

$f : E = \{0,1\} \longrightarrow F = \{0,1,2\}$

$f(0) = 1, \; f(1) = 0$

f est injective mais g ne l'est pas.

$g\circ f : E = \{0,1\} \longrightarrow G = \{0,1,3\}$

$(g\circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$
$(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$ $\Big\} \Rightarrow$ $g\circ f$ est injective

mais g ne l'est pas car $1 \neq 2$ et $g(1) = g(2) = 0$.

<u>EXO3</u> $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$.

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(t) = t^3 - 3t$.

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

Il est alors ~~[illegible]~~ évident que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. $3 = 1+1+1$

- $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = f(x)$ ($\Rightarrow x \mathcal{R} x \Rightarrow \mathcal{R}$ est réflexive)
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\quad x \mathcal{R} y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$
  $\Longrightarrow y \mathcal{R} x$ ($\Rightarrow \mathcal{R}$ est symétrique)
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\quad x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{cases}$
  $\Longrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x \mathcal{R} z$ ($\Rightarrow \mathcal{R}$ est transitive)

Par définition : $\dot{x} = \{a \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} a\}$ 0,5

$= \{a \in \mathbb{R} : f(x) = f(a)\}$

$f(x) - f(a) = x^3 - 3x - a^3 + 3a = (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3)$.

Donc, $f(x) = f(a) \Leftrightarrow (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x - a = 0 \Rightarrow x = a. \\ \text{ou} \\ P(x) = x^2 + ax + a^2 - 3 = 0 \end{cases}$ 0,5

Le discriminant de P est $\Delta = 3(4 - a^2)$.

$|x| > 2 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \dot{x} = \{x\}$ 0,5

$x = \pm 2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \dot{x} = \{x, -\frac{x}{2}\}$ 0,5

$|x| < 2 \Rightarrow \Delta > 0$. on distingue deux cas :

$x = \pm 1 \Rightarrow \dot{x} = \{x, -2x\}$ 0,5

$x \neq \pm 1 \Rightarrow \dot{x} = \{x, \frac{1}{2}(-x - \sqrt{3(4-x^2)}), \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3(4-x^2)})\}$

0,5

$|x| > 2 \Rightarrow \text{Card}(\dot{x}) = 1$

$x = \pm 2 \Rightarrow \text{Card}(\dot{x}) = 2$

1

$|x| < 2$ et $x = \pm 1 \Rightarrow \text{Card}(\dot{x}) = 2$

$|x| < 2$ et $x \neq \pm 1 \Rightarrow \text{Card}(\dot{x}) = 3$