On a communication entre tout les états t.q. $P_{ij} \geq 0$ $\forall i,j \in \{1,2\}$

La chaîne est fermé, donc, elle est indécomposable (la chaîne donc est irréductible)

1

3. La loi stationnaire

En résolvant le système d'équations.

$\pi M = \pi$;

$$(\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{\pi_0} \\ \cancel{\pi_1} \end{pmatrix} (\pi_0, \pi_1)$$

1

ce qui donne :

$$\boxed{\pi = \left(\frac{15}{19}, \frac{4}{19}\right)}$$

Ceci correspond aux proportions de voitures et de camions sur cette route.

$\boxed{7}$

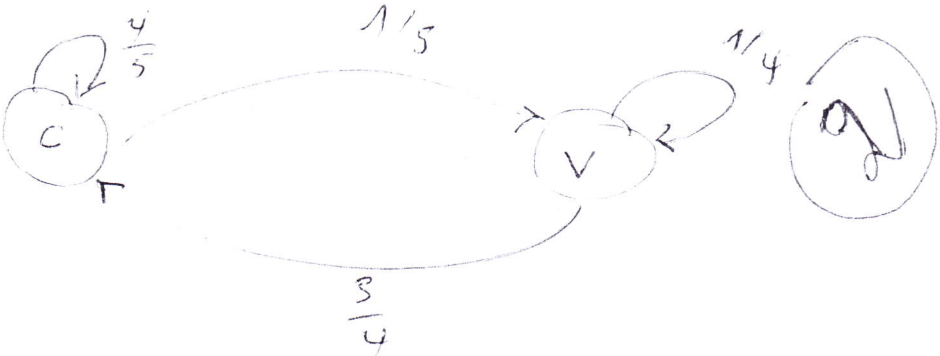
NB. Consultation programmée le 22/01/2023 à 14h00 (Dpt de Maths E5)

EXO 3 →

On a la matrice de transition de la chaîne.

$$M = \begin{array}{c|cc} & C & V \\ \hline C & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ V & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

1. Graphe de transition de M :



2. Les probabilités P_{ij} ; $i,j \in \{1,2\}$

- $P_{11} = P_{CC} = \frac{4}{5}$ c-à-d sur la route : $\frac{4}{5}$ des camions sont suivis par un camion 0,5

- $P_{12} = P_{CV} = \frac{1}{5}$ des voitures sont suivis par un camion. 0,5

- $P_{21} = P_{VC} = \frac{3}{4}$ des camions sont suivis par une voiture 0,5

- $P_{22} = P_{VV} = \frac{1}{4}$ des voitures sont suivis par une voiture. 0,5

La VaR$(X;\alpha)$ contient un chargement de sécurité si : $\boxed{VaR(X;\alpha) \geq E(X)}$ 0,5

Calculons $E(X)$ de X en utilisant la représentation alternative de l'espérance mathématique, on obtient :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \bar{F}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{2+x}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x}\,dx$$

1 1

$$= 2\,Ln(2+x)\Big|_0^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

On en déduit que la VaR$(X;\alpha)$ ne contient pas un chargement de sécurité !

0,5

Ex02 :

X : v.a caractérise la distribution des charges de sinistres de Pareto $(\alpha=1, \theta=2)$, $X \hookrightarrow Par(1,2)$.

1. Fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{x+2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1

2. Calculon le α - quantile q_α :

Par définition on a $q_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$:

Posons $y = 1 - \dfrac{2}{x+2} \Rightarrow x = F^{-1}(y) = \dfrac{2y}{y-1}$

On en déduit : $\boxed{q_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\cancel{1-\alpha}}}$

1

Puisque F est continue, croissante ↗

Alors donc :

$$\boxed{VaR(X;\alpha) = F_X^{-1}(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}}$$

1

L'écart type n'est pas bien adapté à l'activité d'assurance, parce qu'il est ~~symétrique~~ inadéquate pour le contrôle de risque, car il est symétrique et pénalise autant les « bonnes variations » que les « mauvaises »

2) Propriétés (1)

a) La VaR n'est pas cohérente. car

La VaR n'est pas sous-additive.

contre exemple :

$X \hookrightarrow Par(1,1)$

$Y \hookrightarrow Par(1,1)$

$$VaR(X+Y,\alpha) \geq VaR(X,\alpha) + VaR(Y,\alpha)$$

0,5

b) Pour tout $\alpha \in [0,1]$: La $TVaR(X,\alpha)$ est une fonction ↗ du niveau α. 0,50

car :

~~et comme~~ :

$$TVaR(X,\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR(X,p)\,dp \geq VaR(X,\alpha)$$

0,50

et comme La $VaR(X,\alpha)$ est une fonction ↗ en "α", on en déduit que :

- $\frac{d}{d\alpha} TVaR(X,\alpha) \geq 0$ et 0,50

$TVaR(X,\alpha) \geq TVaR(X,0) = E(X)$ 0,50

- On conclut que La TVaR est contient un chargement de sécurité 0,50

Corrigé type Master 2 EDP et AN

Modélisation stochastique

EXO1

1. Les mesures de risques.

- La $VaR(X,\alpha)$ est le quantile d'ordre α notée q_α

tq : $VaR(X,\alpha) = q_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$ 0,50

- La $TVaR(X,\alpha)$ au niveau α est définie par :

$$\boxed{TVaR(X,\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR(X,p)\,dp}$$ 0,50

* La moyenne de VaR de niveau supérieur à α

Statistiquement

- La $VaR(X,\alpha)$ est le montant qui permettra de couvrir le montant de sinistres engendré par le risque X avec une Probabilité α. 1

- La $TVaR(X,\alpha)$ s'interrèsse par la perte moyenne au-delà de la VaR, donc la TVaR est très sensible de la queue de distribution 1