Université 8 Mai 1945 - Guelma

Faculté de Mathématique, de l'Informatique et des sciences de la Matière

Année universitaire 2022/2023

Département de Mathématiques

2ème Année Master EDP et A.Numérique

PV DE NOTE

Matière: Elements de la théorie du Contrôle

N°	Matrcicule	Nom	Prénoms	C.C	Exam	Consult.	Signature	Ratt
01	17/36046827	AZZOUZ	IMEN	14,25	06,5			
02	16/36051916	BELAAZ	NOR ELHOUDA	11,75	05,5			
03	10/6033668	BESSAKLIA	HESNA	13,5	07,5			
04	12/6031649	BOUDOUDA	MARWA	14,75	12,0			
05	18/36037281	BOUHSSANE	NASSIMA	14,5	07,5			
06	16/36043517	BOUZID	BOCHRA	13,5	05,5			
07	18/36040197	CHEIKH	NARIMANE	13,0	08,0			
08	16/36041805	CHIHAOUI	AMIRA	15,0	08,0			
09	15/36049242	CHIROUF	RAFIDA	12,75	10,0			
10	18/36037235	DOUAKHA	NADA	14,75	10,0			
11	17/36040291	FARTAS	LINA SOUNDOUS	15,0	07,5			
12	18/36037290	FERDJALLAH	RAZIKA	16,25	08,5			
13	12/9054552	FRIDJAT	ALI	13,5	09,5			
14	18/36037150	GHARSI	SARRA	15,75	5,5			
15	11/6034155	HADDAD	CHAHRA	15,25	06,0			
16	16/36051099	HADDOUCHE	KHAWLA	12,75	08,5			
17	18/36037140	HAMERI	ROUMAYSSA	15,75	08,0			
18	18/36040743	HASSAINIA	CHAIMA	15,75	08,0			
19	17/36039740	JENNAH	SARRA	13,25	06,5			
20	16/36042306	KARDOUSSI	CHOROUK	16,25	05,0			
21	17/36043305	LABIOD	SAFA	14,25	07,0			
22	17/36043275	LAMOURI	SELMA	15,75	07,5			
23	15/36045713	MEZARA	INES	12,5	07,5			
24	18/36040755	NASRI	GHADA	13,75	08,0			
25	18/34056832	OULED MERIEM	FERIEL	14,75	07,5			
26	11/6030646	SAADA	ZAKARYA	/	/			
27	18/36040365	SAMOUDI	SARRA	16,0	07,0			
28	18/36037277	TABANE	IMANE	15,0	08,5			
29	17/36045278	TLIDJANI	ROUMAYSSA	15,75	08,5			
30	17/36044426	ZADEM	HADIL	16,25	06,0			
31	17/36045338	ZERAOULIA	WARDA	13,5	07,5			
32	16/36044552	ZITOUNI	NAIMA	15,0	07,0			

Nom,prénom et signature chargé TD

S-Badraoui Nom,prénom et signature chargé de Cours

Master 2 [illegible] . S1 Corrigé

EX1 (a) famille orthonormée : $\langle e_k \mid e_j \rangle = \delta_{kj}$

(b) Base hilbertienne : f. orthonormé et $\overline{\text{vect}\{e_k\}} = H$.

(c) $(\Rightarrow)$ si (e_k) est totale : on a Parseval : $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 0^2 = 0 \Rightarrow u = 0$

et $\langle u, e_k \rangle = 0$

$(\Leftarrow)$ $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k \right\}_n$ est de Cauchy : $\exists \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j \rangle e_j = v$

On a : $\langle u - v, e_k \rangle = \langle u, e_k \rangle - \lim_{m \to \infty} \langle u, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle =$

$= \langle u, e_k \rangle - \langle u, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = \langle u, e_k \rangle - \langle u, e_k \rangle = 0 \quad \forall k$

D'après l'hyp. $u - v = 0 \Rightarrow u = v = \sum_1^{\infty} \langle u, e_k \rangle e_k$, $\{e_k\}$ est total

EX2 (a) La sol de (S) pour $y^0 = 0$ est $\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} u(s)\, ds$

donc : $\int_0^T e^{-\alpha(T-s)} M e^{-\alpha s}\, ds = 1 \Rightarrow M \int_0^T e^{-\alpha T}\, ds = 1$

$\Rightarrow M T e^{-\alpha T} = 1 \Rightarrow M = \frac{1}{T} e^{\alpha T}$, c.a.d $u(t) = \frac{1}{T} e^{-\alpha(t-T)}$

(b) On a : $\|u\|^2 = \int_0^T |u(t)|^2\, dt = \int_0^T \frac{1}{T^2} e^{-2\alpha(t-T)}\, dt$

$= \frac{1}{T^2} e^{2\alpha T} \int_0^T e^{-2\alpha t}\, dt = -\frac{1}{2\alpha T^2} + \frac{1}{2\alpha T^2} e^{2\alpha T}$

$\Rightarrow \frac{2\alpha T^2}{e^{2\alpha T}} \|u\|^2 = -\frac{1}{e^{2\alpha T}} + 1 \Rightarrow \lim_{\alpha \to \infty} \frac{2\alpha T^2}{e^{2\alpha T}} \|u\|^2 = 1$

$\Rightarrow \|u\| \underset{\alpha \to \infty}{\sim} \frac{e^{\alpha T}}{\sqrt{2\alpha}\, T}$.

EX3 (a) La Contrôlabilité exacte (Voir le Cours)

(b) La Contrôlabilité approchée (Voir le Cours).

(c1) Kalman : $AB = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha+3 \end{pmatrix}$, $K = [\underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}}_{B} \; \underbrace{\begin{matrix} 3 \\ \alpha+3 \end{matrix}}_{AB}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

$\text{rg}\, K = 2 \iff \alpha \neq 0$: (S) est Contrôlable, $\alpha = 0$: (S) ne l'est pas

(c2) e^{At}, $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2 \to \lambda = 2$. v.p. double : $e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A t$

$\begin{cases} e^{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 (2t) \\ t e^{2t} = \alpha_1 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = e^{2t} \\ \alpha_0 = (1 - 2t) e^{2t} \end{cases}$ $\therefore$ $e^{At} = \begin{bmatrix} (1-t) e^{2t} & 2t e^{2t} \\ -\frac{1}{2} t e^{2t} & (1+t) e^{2t} \end{bmatrix}$

(.) M ? $\int_0^T e^{A(T-s)} B M\, ds = y^1 \Rightarrow M \int_0^T e^{A(T-s)} B\, ds = y^1 \Rightarrow$

$M \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} - T + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} T\right) e^{2T} \\ -\frac{3}{8} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} T\right) e^{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ C'est pas possible Donc $\nexists\, u = M$ t.q $y = y^1$

(c3) $CA = (1 \;\; -1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 3 \end{pmatrix} = (1 - \alpha \;\; -1)$

$K = \begin{matrix} C \\ CA \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1-\alpha & -1 \end{bmatrix}$ Si $\alpha = 1 \Rightarrow \text{rg}\, K = 2$ (S) observable

Si $\alpha \neq 1$: (.) $\alpha = 0$: $\text{rg}\, K = 1$ (S1) n'est pas observable

(.) $\alpha \neq 0$: $1 - \alpha = \lambda \neq 1$; $\text{rg}\, K = 2$ (S1) observable

Donc (S1) est obs. $\iff \alpha \neq 0$